**2020年第十七届五一数学建模竞赛题目**

**C题 饲料混合加工问题**

饲料加工厂需要加工一批动物能量饲料。饲料加工需要原料，如加工猪饲料需要玉米、荞麦、稻谷等。加工厂从不同的产区收购了原料，原料在收购的过程中由于运输、保鲜以及产品本身属性等原因，存在着效能率的问题（如1吨玉米可加工成0.7吨左右的玉米面）。这个数据在原料进厂之后可以通过随机抽样进行检测得到。

某饲料加工厂有9个加工窖，现有一批加工任务，要将16个加工原料（见表1）按照某种混合方案一次性放入加工窖中进行加工。一个加工窖的混合产品称为一个加工包。如果某加工原料重量不少于500千克，则可以单独成为一个加工包。因产品属性原因，要求品种代码10的加工原料不能单独成为一个加工包。每一个加工窖能够加工的重量有限定范围（见表2）。加工窖加工成本由点火成本（也称固定成本）与加工量成本（也称可变成本）构成，其他成本暂不考虑。表1提供了各加工原料的品种代码、总重量和效能率。表2提供了每一个加工窖能够加工的重量范围以及点火成本、加工量单位成本数据。

由于加工窖数量低于饲料加工原料的品种数，所以在加工前需要将若干个加工原料进行混合。为了保证加工后饲料的质量，要求混合的任何两个加工原料之间必须具有亲缘关系。工厂技术人员对每种加工原料进行了基因检测，得到了10个关键位点的基因序列（见表1），并规定，两个加工原料如果有N个相同位点的基因序列标记相同，就认为这两个加工原料的亲缘值为N（如果N大于0，则说明这两种加工原料之间具有亲缘关系），一个加工包中所有原料两两之间亲缘值的平均值称为亲缘度。例如品种代码1、2、5的加工原料混合成为一个加工包，假设品种代码1和品种代码2的亲缘值为5，品种代码1和品种代码5的亲缘值为3，品种代码2和品种代码5的亲缘值为5，那么它们的亲缘度就是(5+3+5)/3。如果一个加工包中只含有一种加工原料，则该加工包的亲缘度为10。本题仅从亲缘度角度考虑混合加工饲料的质量，亲缘度越高，饲料质量就越高。

请考虑下列问题：

1. 请研究16个加工原料两两之间的亲缘值，并进行统计性分析。
2. 将16个加工原料进行混合全部放入9个加工窖中。请建立数学模型，求出饲料质量最高的混合方案并给出每个加工包的亲缘度。
3. 将16个加工原料进行混合全部放入9个加工窖中。请建立数学模型，求出平均能耗率超过80%的加工包数量最多的混合方案并给出每个加工包的能耗率，并将结果填入表3。
4. 如果饲料加工厂允许部分加工窖不生产，请建立数学模型，给出混合加工方案，用尽量低的加工成本完成整个加工任务，同时要求平均能耗率超过80%的加工包尽量的多。
5. 如果饲料加工厂允许部分加工窖不生产，但必须完成整个加工任务。请建立数学模型，给出混合加工方案使得（1）饲料质量尽量高，（2）加工成本尽量低，（3）平均能耗率超过80%的加工包尽量多。

表1 各加工原料的品种代码、总重量、效能率和基因序列标记

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 品种代码 | 总重量千克 | 效能率 | 位点基因序列（用字母简化表达） | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 300 | 0.88 | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j |
| 2 | 500 | 0.60 | a | b | c | d | e | o | p | k | l | m |
| 3 | 200 | 0.93 | f | g | h | a | j | o | p | k | l | m |
| 4 | 500 | 0.90 | f | g | h | i | j | l | p | f | o | p |
| 5 | 300 | 0.90 | f | b | h | d | e | o | p | a | o | z |
| 6 | 400 | 0.78 | r | m | t | u | q | f | g | a | f | z |
| 7 | 300 | 0.70 | r | s | t | u | k | f | g | h | f | c |
| 8 | 300 | 0.83 | r | s | t | u | a | b | h | i | j | c |
| 9 | 400 | 0.95 | c | s | a | f | v | w | a | i | j | c |
| 10 | 600 | 0.87 | b | m | n | i | a | z | h | f | o | z |
| 11 | 100 | 0.65 | m | a | m | e | a | z | a | b | a | b |
| 12 | 600 | 0.75 | m | c | m | e | x | h | a | b | n | a |
| 13 | 500 | 0.8 | b | a | n | y | c | g | m | b | m | b |
| 14 | 400 | 0.68 | m | c | m | y | x | g | m | b | n | b |
| 15 | 300 | 0.87 | b | x | n | i | c | l | b | c | m | p |
| 16 | 300 | 0.83 | c | c | a | f | x | h | b | c | m | j |

表2 加工窖加工的重量范围、点火成本、加工量单位成本

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 加工窖编号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 加工重量下限（千克） | 300 | 300 | 300 | 600 | 600 | 600 | 900 | 900 | 900 |
| 加工重量上限（千克） | 600 | 600 | 600 | 900 | 900 | 900 | 1200 | 1200 | 1200 |
| 点火成本 （元） | 400 | 400 | 400 | 500 | 500 | 500 | 600 | 600 | 600 |
| 加工量单位成本 （元/千克） | 2 | 2 | 2 | 1.8 | 1.8 | 1.8 | 1.6 | 1.6 | 1.6 |

表3 问题3的结果（每个加工窖所含每种加工原料的重量，千克）

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 加工窖  加工原料 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 300.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 0.0 | 37.0 | 0.0 | 0.0 | 224.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 239.0 |
| 3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 200.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 4 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 176.0 | 324.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 6 | 79.0 | 0.0 | 0.0 | 222.0 | 0.0 | 99.0 | 300.0 | 0.0 | 0.0 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 90.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 210.0 |
| 8 | 300.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 8.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 29.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 10 | 0.0 | 0.0 | 211.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 363.0 |
| 11 | 0.0 | 5.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 94.0 | 0.0 | 389.0 | 0.0 |
| 12 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 88.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| 13 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 500.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 511.0 | 0.0 |
| 14 | 40.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 299.0 | 0.0 | 61.0 |
| 15 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 2.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 298.0 |
| 16 | 0.0 | 273.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 27.0 |
| 能耗率 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |